

## NGHIÊN CỨU KHẢO SÁT DAO ĐỘNG TẮT DẦN BẰNG NGÔN NGỮ PYTHON

**Trần Xuân Hôi**

*Trường Đại học Phú Yên*

*Email: [tranxuanhoi@pyu.edu.vn](mailto:tranxuanhoi@pyu.edu.vn)*

*Ngày nhận bài: 10/08/2022; Ngày nhận đăng: 26/05/2023*

### **Tóm tắt**

*Phương trình động lực học của dao động tắt dần là một phương trình vi phân bậc hai. Việc khảo sát dao động tắt dần bao gồm giải các phương trình vi phân và mô tả sự biến thiên các nghiệm của nó. Bằng cách dùng ngôn ngữ Python để khảo sát dao động tắt dần, bài báo này cho thấy có những ưu điểm nhất định như mang tính trực quan cao, sử dụng tích hợp trong giảng dạy đại học, ứng dụng ngôn ngữ lập trình hiện đại vào vật lý.*

**Từ khóa:** *Dao động tắt dần, Python, dạy tích hợp*

### **Research on damped oscillation using programming language Python**

**Tran Xuan Hoi**

*Phu Yen University*

*Received: August 10, 2022; Accepted: May 26, 2023*

### **Abstract**

*The dynamics equation for damped oscillation is a second order differential equation. The investigation of damped oscillation involves solving differential equations and describing the variation of its properties. By using Python language to survey damping oscillations, this paper shows that there are certain advantages such as high visualization, integrated teaching used in university, application of modern programming languages into physics.*

**Keywords:** *Damped oscillation, Python, integrated teaching*

### **1. Mở đầu**

Khi khảo sát các dao động vật lý của một hệ thì ta không thể bỏ qua lực ma sát. Khi đó, năng lượng của hệ không phải là một hằng số mà giảm dần theo thời gian (Lương Duyên Bình và cộng sự, 2008). Do đó, biên độ dao động sẽ giảm dần theo thời gian. Để thấy được quy luật giảm dần này thì cần phải mô tả được sự biến thiên của các đại lượng đặc trưng như ly độ, vận tốc góc, hay năng lượng của hệ theo thời gian bằng cách giải phương trình động lực học của dao động tắt dần rồi khảo sát nghiệm của nó.

Phương pháp thiết lập phương trình động lực học của dao động tắt dần trong các giáo trình vật lý thường xuất phát từ phương trình Newton. Phương trình động lực học này có dạng là một phương trình vi phân bậc hai. Để thuận tiện thì nghiệm của phương trình này được hầu hết các giáo trình vật lý sử dụng kết quả của toán học (Lương Duyên Bình và

cộng sự, 2008) hoặc dùng toán giải tích cao cấp để chú thích phía sau tài liệu (Phạm Quý Tư và cộng sự, 1999). Việc giải các phương trình vi phân bậc 2 trong toán học không phải là phức tạp song vấn đề này ít khi được nêu chi tiết trong nhiều các tài liệu viết về dao động tắt dần vì nó sẽ làm dài thêm vấn đề và tạo cho người đọc khó xác định trọng tâm của hiện tượng vật lý. Do đó, nếu người học biết được phương pháp giải phương trình này bằng nhiều cách khác nhau thì sẽ chủ động và hiểu được bản chất vấn đề này một cách sâu sắc hơn.

Với xu thế dạy học tích hợp hiện nay, đồng thời giúp người học tiếp cận vấn đề này một cách hiện đại hơn, bài báo này đã tiến hành khảo sát dao động tắt dần bằng ngôn ngữ lập trình Python. Kết quả nghiên cứu mang lại một số ưu điểm nhất định như mang tính trực quan cao, ứng dụng ngôn ngữ lập trình hiện đại vào vật lý, giúp sinh viên mở rộng kiến thức và hiểu được bản chất vật lý một cách sâu sắc hơn.

## 2. Phương pháp

### 2.1. Phương trình động lực học của dao động tắt dần

Phương trình động lực học của các dao động tắt dần đều có dạng toán học giống nhau, đó là một phương trình vi phân bậc 2. Để cụ thể, trường hợp sau đây sẽ xét dao động cơ của con lắc lò xo.

Lực tác dụng vào vật trong quá trình dao động:

- Lực đàn hồi:  $F_{dh} = -ks$
- Lực cản:  $F_c = -\mu v = -\mu \frac{ds}{dt}$

Áp dụng định luật II Newton ta được:

$$-\mu \frac{ds}{dt} - ks = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (*)$$

Trong đó:  $\mu$  là hệ số ma sát,  $k$  là độ cứng của lò xo,  $s$  là li độ dao động,  $m$  là khối lượng của vật,  $\omega_0$  là vận tốc góc, với:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Phương trình (\*) là phương trình động lực học dao động tắt dần của con lắc lò xo, có dạng là một phương trình vi phân bậc hai. Đối với các dao động tắt dần của con lắc đơn hoặc của mạch dao động điện thì phương trình cũng có dạng tương tự về mặt toán học.

### 2.2. Ngôn ngữ lập trình Python

Python là một ngôn ngữ lập trình bậc cao cho các mục đích lập trình đa năng, đặc biệt được dùng rộng rãi trong phát triển trí tuệ nhân tạo. Python luôn được xếp hạng vào những ngôn ngữ lập trình phổ biến nhất hiện nay. Thay vì tích hợp hết tất cả các tính năng vào phần cốt lõi, Python được thiết kế để dễ dàng mở rộng bằng các mô đun. Python nỗ lực hướng đến một cú pháp đơn giản hơn, gọn gàng hơn trong khi vẫn cho các nhà phát triển lựa chọn phương pháp viết mã của họ. Python là một ngôn ngữ hàng đầu được dùng trong các lĩnh vực khoa học công nghệ, cụ thể như dùng để phân tích dữ liệu, phát triển trí tuệ nhân tạo, phát triển web, xây dựng giao diện máy tính, xây dựng ứng dụng di động.

Trong nghiên cứu này, bài báo đã sử dụng Python để giải phương trình vi phân bậc nhất

và phương trình động lực học vi phân bậc hai dao động tắt dần của con lắc lò xo. Từ đó, khảo sát sự biến thiên của các đại lượng bằng cách xuất đồ thị và dữ liệu các đại lượng đặc trưng.

### 3. Kết quả và thảo luận

#### 3.1. Thiết lập phương trình

Các hiện tượng thực tế trong tự nhiên hầu hết đều xảy ra một cách liên tục, điều này có thể tìm thấy trong mọi lĩnh vực như cơ học, điện từ học hay vật lý nguyên tử và hạt nhân. Do đó, để mô tả các hiện tượng thực này, trong vật lý người ta dùng các phương trình vi phân.

Trong kỹ thuật và phần mềm máy tính, người ta thường sử dụng phương pháp số hóa để giải gần đúng của các phương trình vi phân bằng. Phương pháp số hóa (numerical method) là một phương pháp gần đúng, có ưu điểm là thuận tiện trong việc lập trình cho máy tính thực hiện và giải được nhiều bài toán mà nếu dùng phương pháp khác sẽ phức tạp hơn (S.P. Venkateshan, Prasanna Swaminathan, 2014). Bằng phương pháp số hóa, bài báo này sẽ sử dụng gói `scipy.integrate` với hàm `odeint` cho Python để thiết lập và giải các phương trình vi phân của dao động tắt dần (<https://apmonitor.com>).

Hình 1 thể hiện đoạn mã được nhập trên Python, trong đó phương trình (\*) được định nghĩa qua hàm `ddtd` do người dùng đặt ra, các hàm `y1` và `y2` được định nghĩa là các hàm chỉ sự biến thiên của biên độ dao động tắt dần. Bài toán được giải với điều kiện ban đầu được giả định là vận tốc bằng 0 và li độ là cực đại 2 cm. Các giá trị ban đầu này có thể được thay đổi tùy ý theo từng bài toán cụ thể bằng cách cho người dùng nhập trực tiếp các giá trị khi chạy chương trình.

```

11
12 # s''(t) + 2mu*s'(t) + omega_2*s = 0
13 # s'(t) = omega(t)
14 # omega'(t) = -mu*s'(t) - omega_2*s = s''(t)
15
16 omega_2 = k/m
17 def ddtd(y, x, mu, omega_2):
18     x, omega = y
19     dydx = [omega, (-mu/m)*omega - omega_2*x]
20     return dydx
21 y0 = [2, 0] # Điều kiện ban đầu
22 x = np.linspace(0, 10, 101)
23 from scipy.integrate import odeint
24 sol = odeint(ddtd, y0, x, args=(mu, omega_2))
25 x = np.linspace(0, 10, 101)
26 y1 = 2*np.exp((-mu/(2*m))*x)
27 y2 = -2*np.exp((-mu/(2*m))*x)
28

```

**Hình 1.** Thiết lập các phương trình cho Python

#### 3.2. Khảo sát các đại lượng đặc trưng của dao động tắt dần

Phương trình li độ dao động của vật dao động tắt dần chính là nghiệm của phương trình (\*). Nếu biết được li độ, ta có thể biết được giá trị của một số đại lượng đặc trưng khác như vận tốc góc và năng lượng tại một thời điểm bất kì. Hình 3 là đồ thị mô tả sự biến thiên của li độ và năng lượng dao động trong khoảng thời gian 10 s đầu tiên, được xuất từ Python với mã thiết lập được thể hiện như ở Hình 2.

```

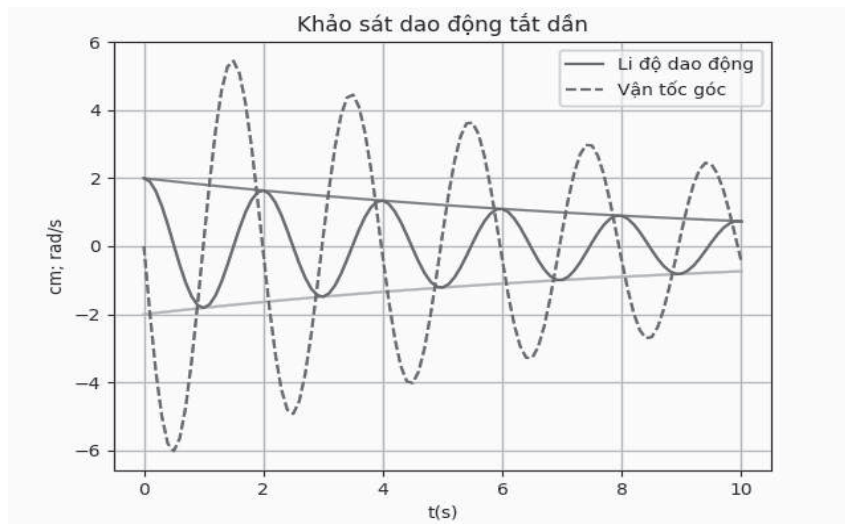
28
29 plt.plot(x,y1)
30 plt.plot(x,y2)
31 plt.title('Khảo sát dao động tắt dần')
32 curve, = plt.plot(x, sol[:, 0], 'b', label='Li độ dao động')
33 plt.plot(x, sol[:, 1], 'b--', label='Vận tốc góc')
34 plt.legend(loc='best')
35 plt.xlabel('t(s)')
36 plt.ylabel('cm; rad/s')
37 plt.grid()
38 xdata = curve.get_xdata()
39 ydata = curve.get_ydata()
40 print("x data: ", xdata)
41 print("y data: ", ydata)
42 plt.show()
43

```

**Hình 2.** Thiết lập xuất đồ thị và số liệu cho Python

Theo Hình 3, li độ của vật dao động tắt dần biến thiên theo qui luật giả tuần hoàn. Trong đó, chu kì dao động thì không đổi theo thời gian nhưng biên độ bị giảm dần theo qui luật hàm mũ và li độ thì biến thiên theo hàm sin. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả giải bài toán tìm nghiệm bằng phương pháp giải tích với nghiệm theo phương pháp này là (Phạm Quý Tư và cộng sự, 1999):

$$s = A_0 e^{-\epsilon t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (**)$$



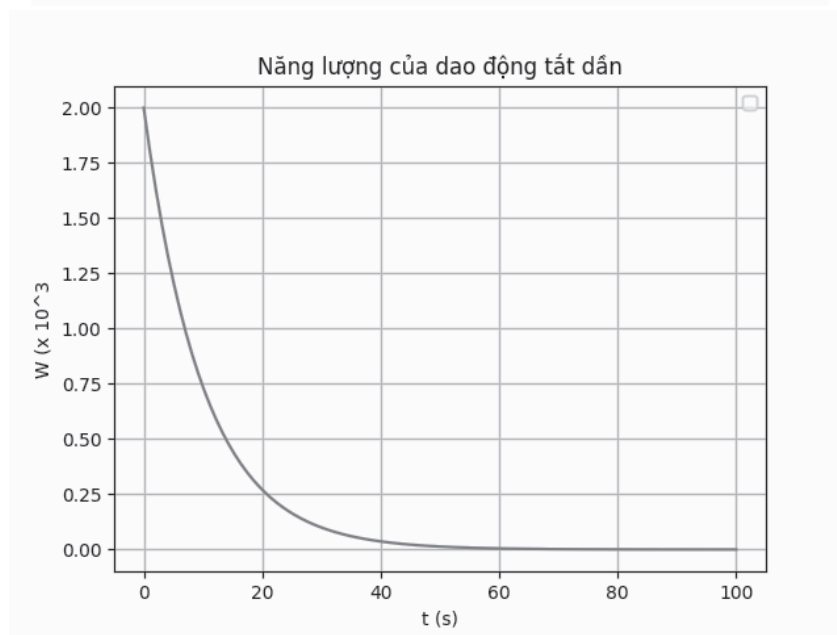
**Hình 3.** Đồ thị biểu diễn sự tắt dần của li độ và vận tốc góc theo thời gian

Dao động tắt dần của con lắc lò xo được xét đến trong bài báo này là một trường hợp cụ thể của dao động tắt dần tổng quát. Các đại lượng được yêu cầu nhập vào là khối lượng  $m$  của vật nặng, độ cứng  $k$  của lò xo, hệ số ma sát  $\mu$ . Hình 3 được xuất ra tương ứng giá trị của các đại lượng là  $m = 1$  kg,  $k = 10$  N/m,  $\mu = 0,2$ . Từ Hình 3 ta thấy, tại các thời điểm  $t = 0; 1; 2; 3; 4 \dots$  (s) thì li độ đạt cực đại nhưng tại các biên độ (qui ước) bị giảm dần tương ứng là 2; 1,81; 1,64; 1,48; 1,34 ... (cm), và do đó, năng lượng tương ứng của hệ cũng giảm theo thời gian (Hình 4). Quá trình giảm dần của li độ được thể hiện đầy đủ trên Bảng 1, xuất từ

đồ thị trên Hình 3.

**Bảng 1.** Li độ biến thiên theo thời gian

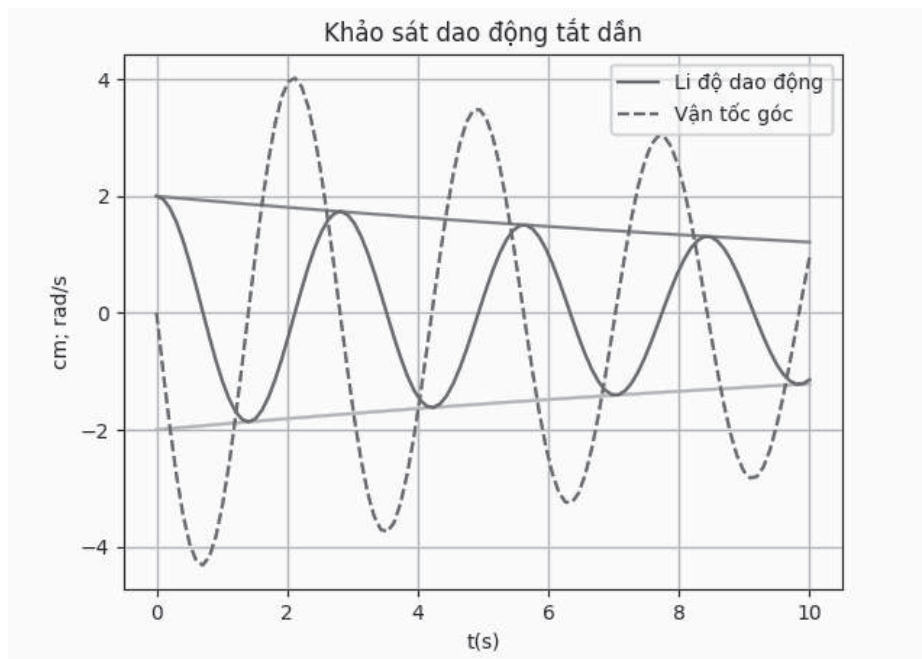
t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
s (cm)	2	1,9	1,62	1,18	0,64	0,04	-0,55	-1,07	-1,48	-1,73
t (s)	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
s (cm)	-1,81	-1,71	-1,44	-1,04	-0,55	-0,01	0,53	0,99	1,35	1,58
t (s)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
s (cm)	1,64	1,54	1,29	0,92	0,47	-0,03	-0,5	-0,92	-1,24	-1,43
t (s)	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
s (cm)	-1,48	-1,38	-1,15	-0,81	-0,39	0,05	0,48	0,86	1,14	1,31
t (s)	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
s (cm)	1,34	1,24	1,02	0,71	0,33	-0,07	-0,46	-0,79	-1,04	-1,19
t (s)	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
s (cm)	-1,21	-1,12	-0,91	-0,62	-0,28	0,08	0,43	0,73	0,96	1,08
t (s)	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
s (cm)	1,09	1	0,81	0,55	0,23	-0,1	-0,41	-0,68	-0,87	-0,98
t (s)	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
s (cm)	-0,99	-0,9	-0,72	-0,48	-0,19	0,11	0,39	0,63	0,8	0,89
t (s)	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
s (cm)	0,89	0,81	0,64	0,42	0,16	-0,11	-0,37	-0,58	-0,73	-0,81
t (s)	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
s (cm)	-0,81	-0,72	-0,57	-0,37	-0,13	0,12	0,34	0,53	0,67	0,73
t (s)	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
s (cm)	0,73	-	-	-	-	-	-	-	-	-



**Hình 4.** Đồ thị biểu diễn sự giảm dần của năng lượng dao động theo thời gian

Để trực quan, các dữ kiện của bài toán có thể được nhập vào tùy ý theo người dùng. Khi đó, đồ thị và các giá trị đầu ra tương ứng của bài toán cũng được truy suất một cách nhanh chóng. Hình 5 là đồ thị li độ và vận tốc góc được xuất ra khi thay đổi khối lượng là  $m = 2$  kg (thay vì  $m = 1$  kg so với lúc đầu). Số liệu về li độ xuất ra khi đó cho thấy, sau một chu kì, biên độ dao động bị giảm từ 2 cm còn 1,74 cm. So với trường hợp ban đầu ( $m = 1$  kg) thì biên độ giảm từ 2 cm còn 1,64 cm. Điều này chứng tỏ rằng, khối lượng của vật càng lớn thì vật duy trì dao động càng lâu, tức vật càng khó bị dập tắt.





**Hình 5.** Đồ thị li độ, vận tốc góc của dao động khi thay đổi khối lượng của vật

#### 4. Kết luận

Thông qua việc sử dụng ngôn ngữ lập trình Python để khảo sát dao động tắt dần, bài báo đã mô tả được các đại lượng đặc trưng của dao động. Tuy kết quả của nghiên cứu này là chưa nhiều song cũng cho thấy có những ưu điểm nhất định khi ứng dụng một ngôn ngữ lập trình máy tính để hỗ trợ trong học tập và nghiên cứu tại trường đại học. Các ưu điểm đó là: Cho phép truy suất và liên kết dữ liệu một cách nhanh chóng, kết quả thể hiện một cách trực quan, tăng cường sử dụng yếu tố tích hợp trong dạy học. Hơn nữa, bài báo cũng cho thấy tiềm năng ứng dụng một ngôn ngữ lập trình hiện đại vào các lĩnh vực khác nhau là rất lớn □

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Lương Duyên Bình, Dư Trí Công, Nguyễn Hữu Hồ, *Vật lý đại cương* (Dùng cho các trường khối kỹ thuật công nghiệp), Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
- Phạm Quý Tư, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, *Dao động và Sóng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.
- S.P. Venkateshan, Prasanna Swaminathan, "Numerical solution methods for PDEs in Computational Methods in Engineering" 2014, Online Available: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/numerical-method>. [Accessed Aug 2022].
- "Solve Differential Equations with ODEINT", Online Available: <https://apmonitor.com/pdc/index.php/Main/SolveDifferentialEquations>. [Accessed Aug 2022].